L’angoisse du triangle : être ou ne pas être… F.A.I. ?

ou l’application des mathématiques aux parcours de distance en vol libre.

La F.A.I. (Fédération Aéronautique Internationale) a édicté une règle bien précise concernant la validité des records de distance pour les parcours en triangle.
Cette règle a d’ailleurs été reprise par la C.F.D. (Coupe Fédérale de Distance) qui attribue un bonus de points supplémentaires si un parcours en triangle respecte cette règle des triangles F.A.I.

Regardons d’un peu plus près en quoi consiste cette règle.
Son énoncé est simple : si nous appelons a, b et c les trois côtés d’un triangle, celui-ci est déclaré F.A.I. si son plus petit côté est au moins égal à 28 % du périmètre du triangle, ce qui s’écrit :

$$\mathbf{\min(a,b,c) \geq 0{,}28\,(a + b + c)}$$

L’esprit de la règle est clair : il s’agit de considérer comme véritables parcours en triangle ceux dont le plus petit côté est suffisamment grand par rapport aux deux autres de façon à ce que le triangle ne soit pas complètement « aplati » et ne ressemble pas en fait à un simple aller-retour, évidemment plus simple à réaliser.

Nous nous proposons ici d’étudier d’un peu plus près les raisons et les conséquences de cette fameuse valeur choisie par la F.A.I. : **k = 28 %, soit k = 0,28.**

On lit en effet parfois que ce coefficient est jugé un peu trop élevé, donc trop contraignant, et qu’une valeur plus faible permettrait la réalisation de parcours en triangle plus ambitieux car un peu plus faciles à réaliser si les parcours autorisés pouvaient être un peu plus « aplatis ».
On peut en effet se demander pourquoi la F.A.I. a retenu cette valeur particulière de 28 % plutôt que 23 % ou 34 % par exemple.

1 – Valeurs possibles pour k :

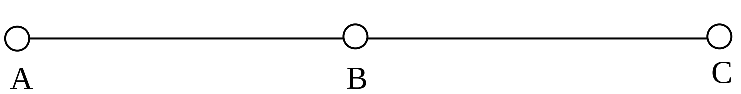
Commençons par nous interroger sur les valeurs extrêmes (maximale et minimale) que peut prendre le coefficient k pour qu’il s’agisse effectivement d’un triangle.

La valeur maximale de k est simple : pour que le plus petit côté d’un triangle soit le plus grand possible, il faut que les trois côtés du triangle soient égaux (triangle équilatéral) et la valeur de k est alors égale à 1/3, soit 0,333 ou 33,3 %.
Nous avons donc : $k \leq 0{,}333$.

En ce qui concerne la valeur minimale que peut prendre k, il est possible de tracer de « vrais » triangles ayant une valeur de k aussi proche de 0 que l’on veut (un côté très petit peut coexister avec deux très grands côtés), mais le problème est de savoir à partir de quelle valeur minimale de k, il n’est plus possible d’avoir un triangle complètement « aplati » avec trois sommets alignés.

Jetons un coup d’œil à la figure 1 :

<u>Figure 1 :</u>



Si AB = BC, alors le plus petit côté du triangle ABC est égal à AB = BC = (AB+BC+CA) / 4 et k vaut donc $k = 1/4 = 0{,}25 = 25\ \%$.

On voit qu'avec une valeur de $k = 0{,}25$ (ou inférieure), il est possible de construire un triangle ABC dont les trois sommets sont alignés et il est difficile dans ce cas de parler réellement de « triangle » au sens habituel du terme.
Cette valeur de 0,25 constitue la valeur maximale pour que le triangle ABC puisse être complètement « aplati ».
À partir de $k > 0{,}25$, les trois sommets A, B et C ne peuvent plus être alignés et nous avons alors affaire à un « véritable » triangle.

Pour tout triangle non plat, nous avons donc la double condition :

$1/4 < k \leq 1/3$, ce qui s'écrit aussi : $0{,}25 < k \leq 0{,}333$ ou $25\ \% < k \leq 33{,}3\ \%$.

2 – Forme des triangles F.A.I. :

Essayons à présent de voir quelle forme doit prendre un triangle pour qu'il soit de type F.A.I.
Nous allons poser la question de la façon suivante : une fois choisis deux sommets A et B du triangle, cherchons où se trouvent les régions du plan dans lesquelles doit être placé le 3^e sommet C pour que le triangle ABC soit de type F.A.I.

Pour faciliter les calculs, nous allons nous situer dans un repère orthonormé (x, y) construit ainsi :

- l'axe des abscisses x porte le segment AB ;
- l'axe des ordonnées y est perpendiculaire à l'axe des x et coupe celui-ci au milieu O du segment AB ;
- nous choisissons le système d'unité tel que OA = OB = 1.

Dans ce repère, nous allons chercher où l'on doit placer le point C de façon à ce que le triangle ABC soit de type F.A.I.
Pour des raisons évidentes de symétrie, il suffit de chercher cette zone du plan pour $x > 0$ et $y > 0$.
Il sera ensuite possible de trouver l'ensemble des zones possibles par symétrie de la zone trouvée par rapport aux axes x et y.

La démonstration du résultat n'a pas sa place dans cet article et le résultat que nous cherchons se traduit, pour la valeur réglementaire $k = 0{,}28$, par la figure 2.

La zone autorisée pour y placer le point C est constituée par le triangle curviligne DEF dans lequel :
- DE est un arc d'ellipse dont les foyers sont les points A et B ;
- DF est un arc de quadrique (courbe du 4^e degré en x et y).

Ce triangle curviligne peut se décomposer en deux zones distinctes séparées par l'arc DG avec :
- G : point tel AB = BG = AG (le triangle ABG est équilatéral et le point G est bien sûr un emplacement autorisé pour le point C avec $k = 1/3 = 33{,}3\ \%$) ;
- l'arc DG est un arc de cercle centré en B avec un rayon égal à 2.

Les points A, F et D sont alignés.

Si on prend comme conventions : d1 = BC, d2 = AC et d3 = AB, alors l'arc DG sépare la zone DEF de la façon suivante :
- au-dessus de l'arc DG, on a d3 < d1 (le plus petit côté du triangle ABC est alors AB) ;

- au-dessous de l'arc DG, on a d1 < d3 (le plus petit côté du triangle ABC est alors BC).

Remarquons que dans le 1er quadrant (x > 0 et y > 0), BC est toujours plus grand que AC et ce dernier ne peut donc pas être le plus petit côté du triangle.

On trouvera en annexe les équations des différentes courbes ainsi que les coordonnées des points D, E, F, G, H, I et J en fonction du coefficient k.
H, I et J sont les intersections de la droite verticale x = 1 avec l'ellipse, le cercle et la quadrique.

Le point C cherché peut en particulier se trouver à l'emplacement de l'un quelconque de ces points et le triangle ABC sera bien F.A.I.
C'est le cas par exemple des triangles ABD, ABE, ABF que nous avons dessinés sur la figure 2.

3 – Influence du coefficient k :

Nous avons à présent tous les éléments pour réaliser l'équivalent de la figure 2 (k = 28 %) pour d'autres valeurs de k.
Nous pouvons ainsi construire la figure 3 pour les valeurs de k = 28 %, 27 %, 26 % et 25 %.

Si on veut voir le type d'aplatissement du triangle ABC qu'il est possible d'obtenir selon les valeurs de k, un bon critère consiste à calculer la valeur la plus petite que peut prendre un des angles du triangle ABC.
En fait, quelle que soit la figure, le triangle le plus « aplati » que l'on peut construire est le triangle ABF ou ABD (ces deux triangles sont semblables, c'est-à-dire que les valeurs de leurs angles sont les mêmes).

On obtient les valeurs suivantes :
- pour k = 28 %, angle min = 38° ;
- pour k = 27 %, angle min = 31,5° ;
- pour k = 26 %, angle min = 22,5° ;
- pour k = 25 %, angle min = 0°.

Cette dernière valeur confirme ce qui a été écrit plus haut.
En effet, dans la figure 3, pour la valeur k = 25%, on trouve comme emplacements possibles pour C les points D et F qui sont tous les deux sur l'axe des x et qui conduisent donc à un triangle ABC complètement « plat ».

En fait, ce qui rend sans doute difficile l'abaissement de la valeur de k dans la règle FAI est le comportement des point D et F lorsque k varie.
En effet, quand k diminue (de 28 % vers 25 %), l'abscisse de D (valeur x) augmente rapidement (celle de F est fixe et égale à 0) pendant que les ordonnées de D et de F (valeurs y) diminuent également vite.
Ainsi le point D se déplace rapidement « vers la droite » et « vers le bas », et le point F en fait autant « vers le bas ».
Ce phénomène permet de construire des triangles ABD ou ABF, de type F.A.I., qui s'aplatissent rapidement.
On voit d'ailleurs clairement sur la figure 3 la déformation du triangle curviligne DEF en fonction de k.

En fait, si on voulait assouplir un peu la règle F.A.I. tout en conservant des triangles de forme assez régulière, il faudrait sans doute choisir une valeur de k intermédiaire entre 28 % et 27 % : 27,5 % par exemple.

En effet, l'angle de 31,5° correspondant à k = 27 % permettrait la réalisation de parcours assez « aplatis », donc plus faciles à réaliser.
Mais j'imagine que la F.A.I. a préféré retenir une valeur entière (en pourcentage) pour le coefficient k de façon à ce qu'il soit plus facile à manipuler.

On trouvera sur la figure 4 l'ensemble des zones du plan dans lesquelles peut se trouver le point C pour le coefficient réglementaire k = 28 %.
Ces zones ont été obtenues, comme indiqué plus haut, par simple symétrie de la figure 2 par rapport aux axes x et y.

4 – Conclusion :

Les lecteurs qui nous ont suivis jusqu'ici doivent se demander à quoi peuvent bien servir de telles constructions géométriques.
Et ils ont bien raison de se poser la question : à pas grand-chose en effet !
Ces réflexions n'ont pas vraiment d'effet opérationnel sur la conception de parcours de vol libre en triangle répondant aux critères F.A.I.
Les chasseurs de records continueront à tâtonner de façon empirique en concevant leurs parcours : je pense qu'ils mesurent les branches d'un parcours projeté (avec une règle graduée ou avec un GPS) et avec l'aide d'une simple calculatrice ou un logiciel de cartographie, ils peuvent en déduire le coefficient k du parcours.
Ils doivent ensuite essayer d'agrandir autant que faire se peut leur projet tout en respectant cette règle impérative des 28 %.
Même en choisissant deux balises de base (les points A et B de nos schémas), il n'est pas possible de construire facilement de façon manuelle les arcs d'ellipse (DE) et de quadrique (DF).
Cet article a permis simplement de mieux comprendre ce choix de 28 %.
Il permet aussi de montrer que les triangles F.A.I. comportant deux petits côtés et un grand côté (comme ABF ou ABD) sont plus aplatis, et donc sans doute un peu plus faciles à réaliser, que ceux composés d'un petit côté et de deux grands côtés comme le triangle ABE.
En fait, le triangle F.A.I. qui présente l'aplatissement le plus élevé est celui comportant deux côtés de longueur égale à 0,28 fois le périmètre et un côté de longueur égale à 0,44 fois le périmètre (c'est le cas des triangles ABF et ABD).

Bons vols à tous, en parcourant ou non des triangles F.A.I. !

Marc Lassalle